UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ROUTES AVEC CONTRAINTES D'HORAIRES

par

Jacques Desrosiers, Paul Pelletier
et François Soumis

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

ROUTES AVEC CONTRAINTES D'HORAIRES

par

Jacques Desrosiers, Paul Pelletier
et François Soumis

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #237
Ecole des Hautes Etudes Commerciales - Rapport de recherche #81-20

Janvier 1982

Dépôt légal - 3e trimestre 1982

Résumé

Le problème considère un ensemble de parcours ayant chacun un lieu de début, un lieu de fin, une durée et un intervalle de temps pendant lequel ils doivent être effectués. Les parcours sont donnés a priori et peuvent consister en la visite d'un ou plusieurs points. Il faut trouver le nombre, l'horaire et les routes de véhicules pour effectuer chacun des parcours dans l'intervalle de temps imposé et ce en minimisant les coûts de déplacements entre les parcours.

Ce problème a été rencontré dans des projets de transport aérien, transport ferroviaire et transport d'écoliers et fut traité, suivant l'état de l'art actuel, de façon sous-optimale en discrétisant le temps ou/et en le divisant en sous-problèmes à résoudre séquentiellement.

Nous avons mis au point une méthode optimale traitant le temps comme une variable continue et trouvant simultanément les horaires et les routes de véhicules. La méthode procède par génération de colonnes produites par un sous-problème de chemin le plus court avec contraintes de temps. Des résultats numériques sont présentés.

ROUTES AVEC CONTRAINTES D'HORAIRES

1. INTRODUCTION

Les choix de routes et d'horaires de véhicules sont des décisions importantes et difficiles pour une entreprise de transport. Importantes car elles contribuent au prix de revient des services offerts en déterminant le nombre de véhicules utilisés, les déplacements à vide, les temps d'attente en plus des déplacements productifs. Dificiles à cause des multiples possibilités que permet un grand nombre de variables interreliées dans l'espace pour le réseau et dans le temps par les exigences de l'horaire.

1.1 Terminologie

Définissons d'abord les termes parcours, interparcours et routes qui sont utilisés tout au long de ce texte. Un parcours est un déplacement productif que devra effectuer un véhicule. Le parcours i est caractérisé par un lieu de début, un lieu de fin, une durée d_i et un intervalle de temps $[a_i, b_i]$ pendant lequel il doit débuter. Un interparcours est un déplacement à vide que peut effectuer un véhicule. L'interparcours (i, j) va de la fin du parcours i au début du parcours j. Sa durée t_{ij} et son coût c_{ij} incluent respectivement la durée et le coût du parcours i. Une route est une suite de parcours et d'interparcours utilisés par un même véhicule.

1.2 Etapes de la planification

La planification de l'utilisation d'une flotte de véhicules est souvent réalisée en effectuant les étapes suivantes:

1° déterminer les parcours à effectuer à partir de la demande des clients;

2° construire un ensemble optimal de routes effectuant tous les parcours.

La première étape traite la demande sans considérer explicitement l'ensemble du réseau. On partitionne la demande et on définit pour chaque partie un parcours la desservant. Les objectifs et les méthodes de cette étapes dépendent de l'application. Les parcours peuvent être formés de façon à satisfaire a priori certaines contraintes locales qui sont difficiles à traiter lors de la construction des routes: contraintes sur la compatibilité des items transportés, sur l'ordre du chargement et de déchargement, sur la capacité des véhicules. Les parcours peuvent être formés pour réaliser une agrégation en regroupant des clients qu'il est bon de desservir dans un certain ordre avec un même véhicule. Le niveau d'agrégation doit être choisi en fonction de la taille du problème que l'on peut traiter à l'étape 2 et de l'optimalité désirée. Si on ne veut pas faire d'agrégation, on définit un parcours pour chaque client et le problème global est traité à l'étape 2.

La seconde étape détermine l'organisation du transporteur pour offrir le service en considérant l'ensemble du réseau. C'est ce pro-

blème que traite la méthode proposée. Voyons maintenant en détail ce problème et sa résolution.

2. LE PROBLEME

Pour construire l'ensemble optimal de routes, il faut déterminer les interparcours utilisés et l'heure de début de chaque parcours. Ces variables doivent être fixées de façon à minimiser le nombre de véhicules et les coûts de déplacement, tout en respectant les contraintes de réseau et les contraintes d'horaires.

Soit P l'ensemble des parcours et I l'ensemble des interparcours considérés. Pour qu'un interparcours soit considéré, il faut que l'on puisse effectuer le parcours j après le parcours i en respectant les intervalles de temps (c'est-à-dire $a_i + t_{ij} \leq b_j$). De plus l'ensemble I est généralement restreint par d'autres contraintes a priori sur les déplacements à vide.

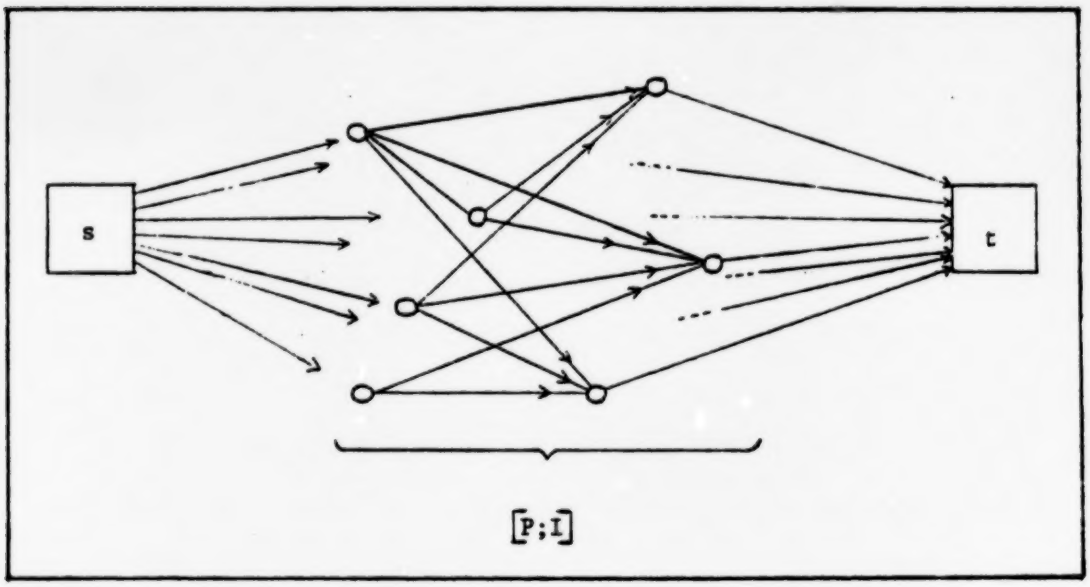
2.1 Le réseau

Ce texte présente la variante du problème avec un seul dépôt d'où chaque véhicule sort une seule fois. D'autres variantes avec plusieurs dépôts ou avec plusieurs véhicules peuvent aussi être traitées en modifiant le réseau.

La figure 1 présente un réseau type pour la variante considérée. L'ensemble N des noeuds du réseau comprend l'ensemble P des parcours et deux noeuds s et t représentant respectivement le dépôt pour la sortie et l'entrée des véhicules. L'ensemble A des arcs comprend

l'ensemble I des interparcours, les arcs de sortie du dépôt (s,P) allant de s vers chacun des parcours et les arcs d'entrée au dépôt (P,t) allant de chacun des parcours vers t. Le coût fixe d'amortissement d'un véhicule est ajouté au coût de déplacement sur les arcs de sortie du dépôt. Cette structure de coût peut être utilisé lorsque chaque véhicule ne sort qu'une seule fois du dépôt.

Figure 1: Le réseau $[N;A] = [s,P,t;I,(s,P),(P,t)]$



2.2 Formulation mathématique

Deux types de variables sont utilisés. Des variables de flots x_{ij}, $(i,j) \in A$ prenant la valeur 1 quand l'arc (i,j) est utilisé par un véhicule. Des variables d'horaires t_i, $i \in P$, associées à l'heure

de début de chacun des parcours. Les routes optimales respectant les contraintes d'horaires sont solution du problème suivant:

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} = \sum_{j\in N} x_{ji} = 1 \qquad i \in P \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i,j) \in A \qquad (3)$$

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow t_i + t_{ij} \leq t_j \qquad (i,j) \in I \qquad (4)$$

$$a_i \leq t_i \leq b_i \qquad i \in P \qquad (5)$$

$$x_{ij} \text{ binaire} \qquad (i,j) \in A\,. \qquad (6)$$

Les relations (1), (2) et (3) forment un problème de fabrication de routes sans contrainte d'horaires. C'est un problème de flot à coût minimum qui se résoud économiquement et dont la solution est entière. Les relations (4) décrivent les exigences de compatibilité entre les routes et l'horaire. Les contraintes (5) imposent les intervalles de temps.

2.3 Intégrité de la solution

La proposition suivante montre que les contraintes (6) peuvent être suprimées de la formulation du problème.

Proposition

Il existe une solution optimale entière au problème de routes avec horaire défini par les relations (1) à (5).

Preuve: le problème (1)-(5) est réalisable; il suffit de prendre $(\forall i)$ $(x_{si} = 1, x_{it} = 1, t_i = a_i)$. Il possède une solution optimale (X^*, T^*) car $x_{ij} \leq 1$ (par (2)) permet de borner l'objectif par

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}.$$

Si X^* n'est pas entier, définissons $J = \{(i,j) \mid x^*_{ij} > 0\}$. Maintenons T^* fixé et considérons le problème de flot à coût minimum sur le sous-réseau obtenu en conservant seulement les arcs de l'ensemble J. C'est un problème de flot pour lequel en plus de la solution optimale X^*, il existe une solution optimale entière $\bar{X}$. On peut facilement vérifier que $(\bar{X}, T^*)$ est une solution optimale entière de (1)-(5).

Remarquons toutefois que même avec la proposition 1, la solution optimale entière ne peut pas être obtenue directement par programmation linéaire car les relations (4) ne sont pas des contraintes linéaires.

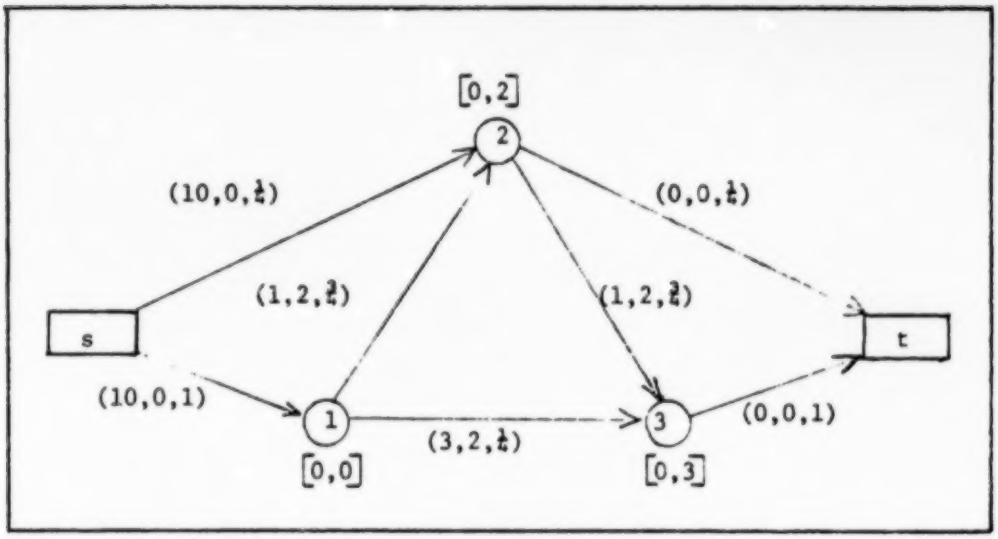
2.4 Autres formulations de la compatibilité routes-horaire

Les relations (4) peuvent s'écrire sous la forme linéaire suivante:

$$t_i + t_{ij} - t_j \leq (1 - x_{ij})\, m_{ij} \qquad (i,j) \in I \qquad (7)$$

avec $m_{ij} \geq b_i + t_{ij} - a_j$. Cette formulation est équivalente seulement si on impose x_{ij} binaire. Sinon pour $0 < x_{ij} < 1$, on peut avoir $0 < t_i + t_{ij} + t_j \leq (1 - x_{ij})\, m_{ij}$ qui ne satisfait pas (4). De plus, en remplaçant (4) et (6) par (7), l'existence d'une solution optimale entière n'est plus garantie comme l'illustre la figure 2.

Figure 2: Variante du problème avec solution fractionnaire



Les triplets associés aux arcs comprennent le coût, la durée et le flot. La solution entière optimale vaut 23 avec deux véhicules, l'un effectuant le parcours 2 et l'autre les parcours 1 et 3. La solution optimale fractionnaire, quand on pose $m_{12} = m_{13} = 0$ et $m_{23} = b_2 + t_{23} - a_3 = 4$ est donnée par les flots indiqués sur les arcs avec les temps $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ et $t_3 = 3$. Son coût est de $14\frac{2}{3}$ en utilisant $1\frac{1}{3}$ véhicule.

Dans le cas particulier où $[a_i, b_i] = [0, n-1]$ pour $i \in P$ et $t_{ij} = 1$ pour $(i,j) \in I$, on peut poser $m_{ij} = n$ et les contraintes (7) deviennent:

$$t_i - t_j + n\, x_{ij} \leq n-1 \qquad (i,j) \in I, \qquad (8)$$

Il s'agit des contraintes d'élimination de sous-tours proposées par Miller, Tucker et Zemlin (1960) pour le problème du voyageur de commerce. Dans ce cas particulier, notre problème devient celui du voyageur de commerce.

Pour le problème de fabrication de routes avec horaire , généralement plusieurs des contraintes (7) sont actives à l'optimum. Ceci laisse présumer de sa difficulté de résolution quand on sait la difficulté du problème du voyageur de commerce où pourtant peu de contraintes d'élimination de sous-tours sont actives à l'optimum.

La relation (4) peut aussi s'écrire sous la forme non-linéaire équivalente:

$$x_{ij} (t_i + t_{ij} - t_j) \leq 0 \qquad (i,j) \in I . \qquad (9)$$

La forme non-linéaire (9) assure aussi l'existence d'une solution optimale entière. Les relations (9) ressemblent aux conditions de complémentarité de Kuhn-Tucker du problème de flot:

$$x_{ij} (\Pi_i + c_{ij} - \Pi_j) = 0 \qquad (i,j) \in I \qquad (10)$$

où Π_i est la variable duale associée au noeud i.

3. APPLICATIONS

Ce problème de fabrication de routes a été rencontré par les auteurs dans le cadre de plusieurs applications; autobus d'écoliers, autobus urbains, trains de voyageurs, flotte d'avions et l'affectation des locomotives avec contraintes d'entretien.

Ce problème se pose aussi lors de l'assignation à m-machines de n tâches devant être effectuées chacune dans un intervalle de temps. Les tâches correspondent au parcours, la suite des tâches sur une machine forme une route et le temps de réajustement d'une machine entre 2 tâches correspond à un interparcours. Le problème a été traité dans ce contexte par Bratley,Florian,Robillard (1975) et Gertsbakh Stern (1978).

3.1 Transport scolaire

En transport scolaire, un parcours du matin visite une suite d'arrêts pour prendre des écoliers et les conduire à une ou plusieurs écoles. L'autobus vide débute le parcours à un arrêt et le termine vide à une école. Le tout doit s'effectuer dans une fenêtre de temps. Le soir les parcours s'effectuent en sens inverse. Tous les interparcours que le temps permet sont considérés. Leurs coûts sont fonction de la distance. Les coûts d'amortissement sont placés sur les arcs de sortie du dépôt. Le problème consiste à fabriquer des routes de plusieurs parcours de façon à minimiser les coûts.

L'expérimentation pour des problèmes de transport scolaire est décrite dans cet article.

3.2 Transport ferroviaire

Lors de la fabrication d'un horaire de trains de voyageurs, on détermine d'abord à partir de l'étude de la demande, les trains à offrir

avec leurs itinéraires et l'intervalle de temps durant lesquels ils peuvent être opérés. Ces trains constituent les parcours pour cette application. Les interparcours considérés sont les attentes et les remorquages. Une attente correspond au passage d'un train se terminant dans une ville à un autre train partant plus tard de cette même ville. Un remorquage consiste à transporter à vide l'équipement entre deux villes en l'ajoutant à un train effectuant ce déplacement. Les interparcours où l'équipement passe par ses propres moyens d'une ville à une autre ne sont pas considérés. Cette application n'utilise pas de dépôt, mais il faut assurer le même niveau de stock d'équipements dans chaque ville à la fin et au début de chaque période pour pouvoir réutiliser la solution de façon cyclique.

3.3 Transport urbain

De façon analogue, pour les autobus urbains, on détermine à partir de la demande les itinéraires des services et les fenêtres de temps pendant lesquels ils doivent être opérés. Ces itinéraires constituent les parcours pour cette application. Les interparcours correspondent à deux types de mouvements: aller directement d'un parcours à un autre avec un coût de déplacement et d'attente, ou bien retourner au dépôt entre les deux parcours avec seulement un coût de déplacement, l'attente au dépôt n'étant pas rémunérée. Entre chaque paire de parcours, on choisit comme arc, quand l'horaire le permet, le moins coûteux des deux. On utilise comme en transport scolaire, des noeuds et des arcs de sortie du dépôt au début de la journée et d'entrée à la fin. Quand le nombre d'interparcours correspondants à des passages au dépôt est de l'ordre du carré du nombre de parcours, on peut réaliser une agrégation pour le réduire à deux fois le nombre de parcours.

3.4 Transport aérien

En transport aérien les projets de vols avec intervalle de temps constituent les parcours. Les attentes dans chaque ville entre la fin d'un vol et le début des suivants forment les interparcours. Dans ce cas aussi, une agrégation permet de réduire le nombre d'arcs. La structure de coût est définie en fonction des pertes ou profits associés aux projets de vols. Pour cette application, on minimise le bénéfice net sans exiger que tous les parcours soient effectués. Ainsi, on effectue simultanément le choix des vols offerts et la construction des routes d'avions.

3.5 Contraintes de kilométrage

Le problème de construction des routes de locomotives en respectant des contraintes d'entretien considère comme parcours les trains à remorquer. Les interparcours comprennent les attentes dans chaque ville entre l'arrivée d'un train et les départs possibles par la suite, les déplacements entre deux villes avec des locomotives en supplément sur le train et les visites à l'atelier de réparation. Ce qui distingue cette application des précédentes, c'est que les intervalles de temps sont remplacées par des intervalles de kilométrage. Il faut revenir à l'atelier avec le kilométrage depuis le dernier entretien , compris dans un intervalle.

4. METHODE DE RESOLUTION

La méthode de résolution est présentée en utilisant des variables de flot sur les routes et non sur les parcours. Pour ce problème, on utilise des routes avec horaire, une telle route étant caractérisée par

les parcours effectués et par l'heure de début de chacun de ces parcours. Une route avec horaire est appelée "route satisfaisant les contraintes d'horaires" si elle satisfait les relations (4) et (5). Les notations suivantes sont utilisées:

Ω : l'ensemble des routes satisfaisant les contraintes d'horaires

$r \in \Omega$: une telle route.

y_r : variable binaire; 1 si la route r est utilisée, 0 sinon

δ_{ri} : constante binaire; 1 si la route r effectue le parcours i, 0 sinon

c_r : coût de la route r, obtenu en sommant le coût des arcs qui composent la route.

4.1 Décomposition et génération de colonnes

La résolution consiste à fabriquer un ensemble de routes de coût minimum satisfaisant les contraintes d'horaires et effectuant une fois chaque parcours. Ce problème de recouvrement se formule de la façon suivante:

$$\text{Min} \quad \sum_{r \in \Omega} c_r y_r \tag{11}$$

$$\sum_{r \in \Omega} \delta_{ri} y_r = 1 \qquad i \in P \tag{12}$$

$$y_r \text{ binaire.} \tag{13}$$

A cause du grand nombre de routes dans Ω, le problème de recouvrement est résolu par génération de colonnes. Une nouvelle colonne de coût marginal minimum est générée en résolvant le problème de plus court chemin avec contraintes d'horaires défini en utilisant les variables duales σ_i du problème de recouvrement:

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij} - \sigma_i)\, x_{ij} \tag{14}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} = \sum_{j\in N} x_{ji} \qquad i \in P \tag{15}$$

$$\sum_{j\in P} x_{sj} = \sum_{j\in P} x_{jt} = 1 \tag{16}$$

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow t_i + t_{ij} \leq t_j \qquad (i,j) \in I \tag{17}$$

$$a_i \leq t_i \leq b_i \qquad i \in P \tag{18}$$

$$x_{ij} \text{ binaire.} \tag{19}$$

Cette méthode de résolution correspond à une décomposition de Dantzig-Wolfe où les contraintes d'horaires sont placées dans le sous-problème. Les contraintes de réseau sont séparées entre le sous-problème et le problème maître: la conservation de flot dans le sous-problème et l'obligation de visiter un parcours dans le problème maître.

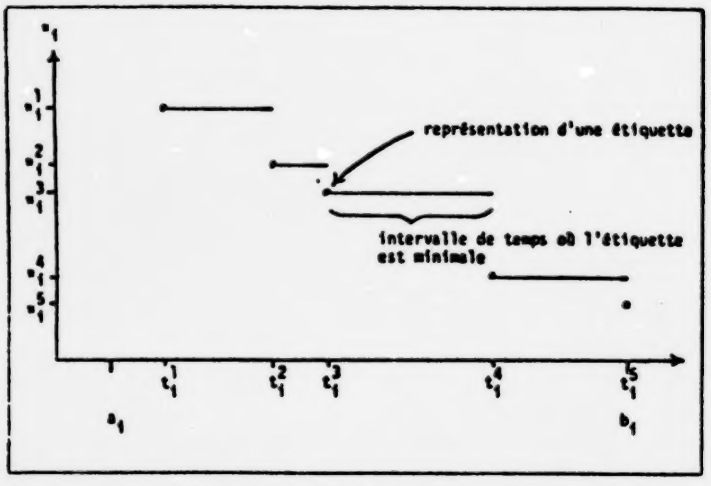
4.2 Résolution du sous-problème

On trouve la route de coût minimum satisfaisant les contraintes d'horaires avec une adaptation de l'algorithme de Ford-Belman que nous appelons plus court chemin avec contraintes d'horaires(P.C.C.C.H.). Rappelons que l'algorithme de Ford-Belman associe une variable duale Π_i à chaque noeud et l'améliore par programmation dynamique jusqu'à l'obtention des valeurs optimales qui sont le coût de l'origine au noeud i par la route de coût minimum. P.C.C.C.H. profite de l'analogie entre t_i dans (9) et Π_i dans (10) et associe aux noeuds des étiquettes (t_i, Π_i) pour traiter simultanément l'horaire et la longueur d'une route. L'étiquette (t_i, Π_i) signifie qu'il existe une route de longueur Π_i respectant les contraintes d'horaires et arrivant au noeud i au plus tôt au temps t_i. Pour

Ford-Belman, il suffit de conserver pendant la résolution une seule valeur Π_i par noeud, le coût de la route de coût minimum trouvé de façon itérative entre l'origine et le noeud i. Avec P.C.C.C.H., il faut conserver à un noeud i une étiquette (t_i, Π_i) tant que l'on n'a pas trouvé une route moins coûteuse et arrivant au plus tard en t_i. L'ensemble des étiquettes conservées à un noeud se réduit à une liste finie Q_i que l'on classe par ordre décroissant des coûts Π_i. Remarquons, comme l'illustre la figure 3, que cette liste est en même temps en ordre croissant des temps t_i. L'amélioration de la liste Q_j à partir de Q_i en considérant les routes de l'origine à j constituée des routes de l'origine à i et de l'arc (i, j) est une mise à jour séquentielle de Q_j à partir de l'information contenue dans Q_i. Une structure de données et une stratégie de gestion des listes d'étiquettes permettant le traitement efficace de ce problème ont été présentées dans Desrosiers, Pelletier, Soumis (1981).

Cette méthode de résolution des sous-problèmes s'applique seulement pour les réseaux ne comportant pas de cycles de coûts négatifs satisfaisant les contraintes d'horaires. Pour qu'un tel cycle existe il faut pouvoir au moins effectuer un premier parcours, un interparcours, un second parcours et un interparcours ramenant le véhicule au début du premier parcours pendant l'intervalle de temps où le premier parcours peut débuter.

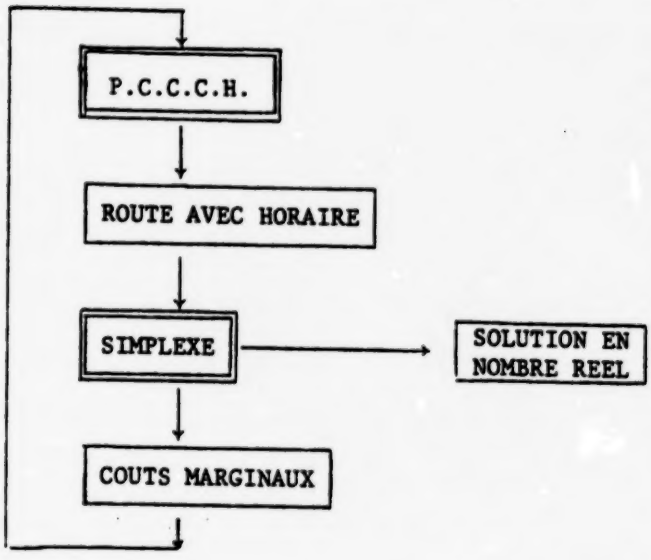
Figure 3 : Représentation d'une liste d'étiquettes



4.3 Résolution du problème maître

Le problème maître est traité avec l'algorithme du simplexe. Cette méthode donne les coûts marginaux σ_i nécessaires pour la génération de colonnes et se prête bien à la réoptimisation à chaque fois que de nouvelles colonnes sont générées. La figure 4 présente une itération majeure: la génération de routes avec horaire, suivie de la réoptimisation du problème de recouvrement. Ces itérations conduisent à la solution optimale en nombre réel.

Figure 4: Génération de colonnes



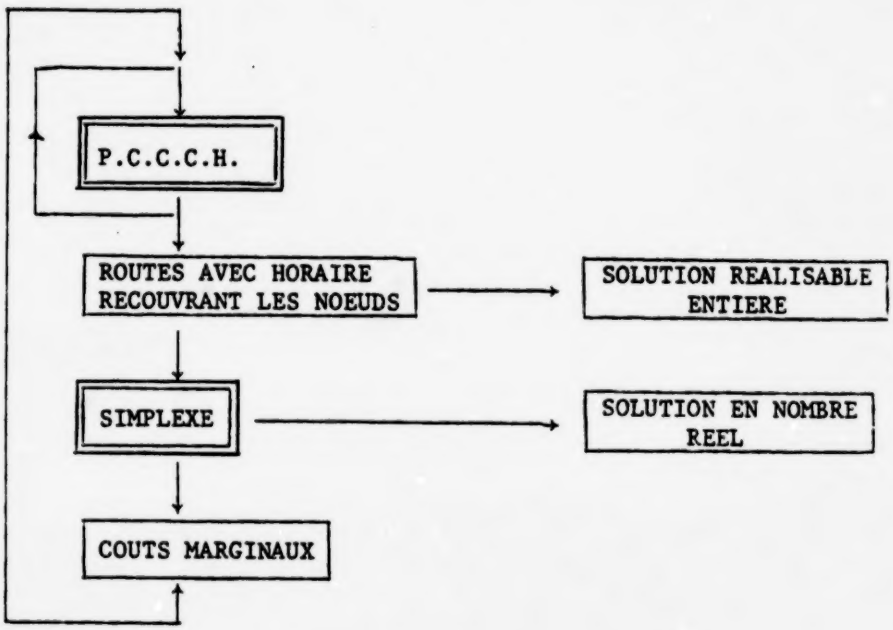
Les premiers essais ont montré que la plus grande partie du temps est utilisée dans le simplexe tandis que P.C.C.C.H. consomme peu de temps. La procédure fut modifiée pour accélérer la convergence en générant plusieurs routes par itérations majeures. Cette modification exploite l'idée qu'il est bon d'inclure dans l'ensemble des routes générées $\Omega' \subseteq \Omega$, toutes routes qui ont une probabilité d'être optimales et même des routes non optimales qui peuvent permettre au cours des itérations de réduire l'objectif et d'améliorer les variables duales. Cette idée permet de réduire le nombre d'itération du simplexe qui est assez coûteux en augmentant l'utilisation de P.C.C.C.H. qui est peu coûteux.

Plusieurs stratégies de génération de multiples colonnes ont été essayées. La méthode suivante s'est avérée supérieure (figure 5):

1° générer la route de coût minimum satisfaisant les contraintes d'horaires;

2° retirer les parcours utilisés par cette route et retourner en 1 s'il reste des parcours.

Figure 5: Génération de multiples colonnes par itération



Cette méthode a l'avantage de fabriquer des routes recouvrant tous les parcours comparativement à d'autres méthodes qui fabriquent des routes n'incluant que les parcours peu coûteux. De plus, en fabriquant des routes disjointes, on favorise l'apparition de solutions entières. La figure 6 présente la comparaison entre les générations de colonnes simple et multiple pour 12 problèmes de 48 parcours en transport scolaire.

Figure 6: Comparaison entre deux stratégies de générations de colonnes

	Nombre d'itérations majeures	Simplexe		Génération de colonnes		Temps total
		Nombre d'itérations	Temps (sec)	Nombre de colonnes	Temps (sec)	
1 colonne par itération	105	761	24,5	153	9,0	33,5
Plusieurs col. par itération	14	356	11.1	255	7.0	18.1

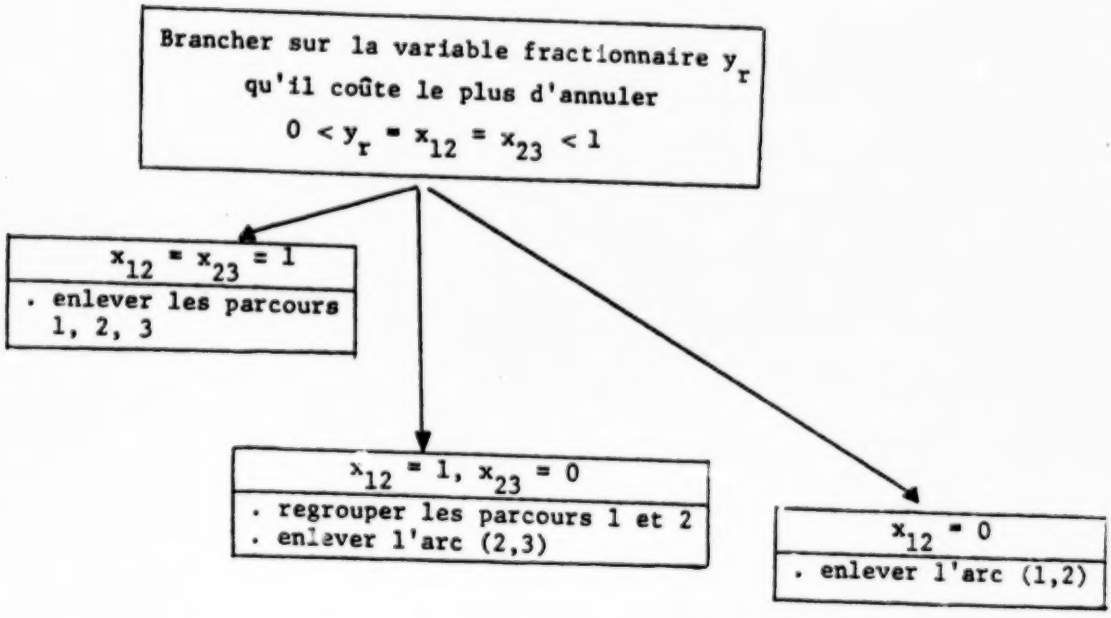
La seconde stratégie réduit sensiblement le nombre d'itérations majeures (réoptimisation du problème maître). Le nombre d'itérations et le temps pour le simplexe sont réduits de moitié. Même si la seconde méthode génère plus de colonnes, elle le fait en moins de temps car en enlevant les parcours utilisés par la colonne générée, on diminue la taille du réseau pour le calcul des plus courts chemins suivants.

4.4 Résolutions en nombre entier du problème maître

Pour ces problèmes la probabilité d'obtenir spontanément une solution entière avec le simplexe est assez forte, et quand la solution n'est pas entière, il n'y a pas tellement de variables fractionnaires à éliminer. On utilise donc, pour trouver une solution entière optimale, une procédure d'énumération implicite avec le simplexe pour résoudre le problème à chaque noeud.

Le branchement, à un noeud, s'effectue sur la route avec flot fractionnaire pour laquelle il en coûterait le plus de réduire ce flot à zéro, selon l'estimation donnée par les coûts marginaux. La partition d'un noeud s'effectue suivant la méthode introduite par Bellmore et Malone (1971) et améliorée par Carpaneto et Toth (1980) pour le voyageur de commerce. Pour faciliter la présentation des branches considérées et de leur traitement , considérons un exemple où le branchement s'effectue sur la route utilisant dans l'ordre les parcours 1, 2 et 3. La figure 7 présente les branches considérées.

Figure 7: L'arbre d'énumération implicite



Pour la branche gauche $x_{12} = x_{23} = 1$, la solution comprend la route constituée des parcours 1, 2 et 3. Pour trouver les autres routes, on enlève les lignes 1, 2 et 3 du problème maître et les routes contenant un de ces parcours. On enlève dans le sous-problème les noeuds correspondant à ces parcours. On réoptimise le problème de recouvrement en générant au besoin de nouvelles routes.

Pour la branche centrale $x_{12} = 1$, $x_{23} = 0$, la solution comprend une route utilisant les parcours 1 et 2 mais pas le parcours 3. Cette route peut être complétée en y ajoutant d'autres parcours. Pour compléter cette route et trouver les autres routes constituant une solution, on fait l'agrégation des lignes 1 et 2 du problème maître que l'on appelle ligne 1∧2. Parmi les routes contenant le parcours 1 ou le parcours 2, on ne conserve que celles contenant à la fois

les parcours 1 et 2 et ne contenant pas le parcours 3. On leur attribue la valeur 1 sur la ligne 1∧2 du problème maître. De même, dans le sous-problème, on fait l'agrégation des parcours 1 et 2. Le nouveau parcours 1∧2 a comme intervalle de temps $[\max \{a_1, a_2 - t_{12}\}, \min \{b_1, b_2 - t_{12}\}]$. Les arcs qui arrivaient en 1 arrivent maintenant en 1∧2. Ceux qui arrivaient en 2 sont supprimés. Les arcs qui partaient de 1 sont supprimés. L'arc (2,3) est supprimé. Les autres arcs qui partaient de 2 partent maintenant de 1∧2 avec des coûts et des durées augmentés respectivement de c_{12} et t_{12}.

Pour la branche de droite $x_{12} = 0$, la solution ne comprend pas de routes utilisant le parcours 1 suivi du parcours 2. On élimine de telles routes du problème maître et on enlève l'arc (1,2) du sous-problème pour éviter d'en générer d'autres.

Dans l'arbre d'énumération implicite, on traite toujours le noeud le plus à gauche. Cette descente sur la gauche réduit rapidement la taille du problème et trouve une solution entière.

5. EXPERIMENTATION

L'algorithme a été utilisé pour construire les routes d'autobus scolaires desservant 6 écoles et effectuant 48 parcours matin et soir. Les transports du matin et du soir sont indépendants et s'étalent chacun sur un peu plus de 1hre30. Les parcours durent de 7 à 33 minutes avec une moyenne de 17 minutes. Les intervalles pendant lesquels peuvent débuter les parcours durent de 0 à 9 minutes avec une moyenne de 5 minutes.

Les deux problèmes ont respectivement 580 et 621 interparcours possibles dont 14% sont intermittents, c'est-à-dire impossible pour certaines heures de début des 2 parcours joints. La durée moyenne des interparcours est de 8 minutes.

Les problèmes sont résolus avec l'objectif de minimiser le nombre de véhicules et à nombre égal de véhicules, minimiser le déplacement à vide. Pour 12 problèmes tests résultant de variation de l'horaire des écoles, nous obtenons la solution du simplexe en 15 à 20 secondes en générant de 200 à 300 colonnes; 40% des solutions sont binaires. L'énumération pour trouver la solution entière fixe en moyenne 1.3 routes avec un maximum de 8. Ces problèmes ont beaucoup de solutions de même valeur et souvent le branchement fait passer à une autre solution de même valeur. Beaucoup de variables hors-base ont des coûts marginaux nuls et ces variables peuvent entrer dans la base sans que l'objectif soit modifié. Pour les 12 problèmes tests, on a trouvé 11 fois dans la branche gauche une solution entière de même coût que la solution réelle. Dans l'autre cas, on a trouvé une solution entière avec un coût à l'entier suivant, car l'objectif de la solution réelle était fractionnaire.

La figure 8 présente une étude sur l'économie des véhicules et la difficulté de résolution, en fonction de la largeur des intervalles de temps pendant lesquels peuvent débuter les parcours. Le problème du soir a été modifié en remplaçant les intervalles $[a_i , b_i]$ par $[a_i-\Delta , b_i+\Delta]$. La première colonne consiste à fixer l'heure de départ au centre de l'intervalle.

Ces résultats montrent que le problème de départ ($\Delta = 0$) que l'on résout facilement n'est pas trivial; le nombre de véhicules est réduit de plus de 10% par rapport au réseau avec heures de départ fixées. On constate aussi que l'on peut s'écarter du problème de réseau en traitant des intervalles d'heure de départ permettant de réduire de 40% le nombre de véhicules sans que le temps de calcul devienne prohibitif.

Figure 8: Variation de la longueur des intervalles d'heure de début du parcours

Δ (minutes)	$-(b_1-a_1)/2$	0	5	10	20
Nb. d'autobus	19	17	15	14	12
Déplacement à vide	171	320	213	351	233
Nb. d'interparcours	497	621	670	790	891
Temps	9	17	28	127	200
Nb. colonnes	213	269	248	296	360
Nb. d'étiquettes	48	105	157	312	403

La taille du réseau des arcs possibles augmente avec Δ ainsi que l'effort de résolution pour le simplexe comme l'indique le nombre de colonnes générées et pour P.C.C.C.H. suivant le nombre d'étiquettes utilisées. Pour $\Delta = 10$ et 20 il n'existe pas de solution binaire de même coût que la solution du simplexe et l'énumération est assez longue.

On a essayé pour ces problèmes l'adaptation de la méthode de Carpaneto et Toth (1980); résoudre des problèmes de réseaux en considérant tous les arcs possibles et effectuer des branchements pour satisfaire les contraintes d'horaires. Pour ($\Delta = 0$) la solution du problème de réseau demande 17 autobus et 316 minutes de déplacement à vide. Cette solution ne respecte pas les contraintes d'horaires et la

meilleure solution réalisable trouvé en 150 secondes utilise 17 autobus et 341 minutes de déplacement à vide. Pour ($\Delta = 10$) la solution du problème de réseau demande 14 autobus avec 339 minutes à vide. La meilleure solution trouvé en 150 secondes demande 15 autobus et 360 minutes à vide, ce qui est un autobus de plus que la solution optimale.

6. CONCLUSION

Cette méthode, contrairement à d'autres approches, est adaptée pour résoudre les problèmes où les contraintes d'horaires sont vraiment actives. Ces problèmes où la présence des contraintes d'horaires augmente sensiblement le coût de l'ensemble optimal de routes, sont les plus difficiles. Il n'est pas efficace d'utiliser pour ces problèmes des méthodes traitant d'abord le problème de réseau pour obtenir une solution entière, puis de modifier ensuite pour satisfaire les contraintes d'horaires. Ces méthodes doivent énumérer un arbre très vaste car le "gap" est grand; de nombreuses modifications sont nécessaires pour satisfaire les contraintes d'horaires, ce qui est difficile et coûteux et perturbe fortement l'optimalité du problème de réseau initial.

En traitant les contraintes d'horaires lors de la fabrication des routes, on perd l'intégrité de la solution, mais on obtient une très bonne borne et il est facile de retrouver l'intégrité. Le succès de cette approche est en accord avec l'opinion que quand on décompose un problème, il est préférable de traiter d'abord les contraintes les plus actives.

BIBLIOGRAPHIE

Bellmare Malone (1971) "Pathology of Traveling Salesman Subtour Elimination Algorithm " Operations Research 19,278-307

Bratley Florian Robilliard (1975) "Scheduling with Earliest Start and Due Date Constraints on Multiple Machines" Naval Res. Logistics Quat., vol. 22, 1975 165-173

Carpaneto Toth (1980) "Some New Branching and Bounding Criteria for the Asymmetric Traveling Salesman Problem," Management Science, 26(7), 736-743 (July 1980)

Desrosiers Pelletier Soumis (1981) "Plus court chemin avec contraintes d'horaires" Rapport de recherche no. 81-19 H.E.C. Montréal

Gertsbakh Stern(1978) "Minimal Resources for Fixed and Variable job Schedules" Operations Research. Vol. 26 No.1 Janv.-Feb. 1978

Miller Tucker Zemlin (1960) "Integer Programming Formulation of Travelling Salesman Problems" Journal of the Association of Computing Machinery, 7, 326-332.